MA1 – 6. cvičení „písemné" (místo 25. 3. 20) – dodatek

3.* – bude „na lenci" cvičení

4. Limity s funkcemi $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ (definovali jsme si tyto dvě funkce na cvičení 5; uděláte si ještě definovat fci inverzní k fci $\cos x$ na $\langle 0,\pi\rangle$ – $\arccos x$, a také inverzní fci ke $\operatorname{cotg} x$ na $(0,\pi)$ – $\operatorname{arccotg} x$)

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$, neboť:

využijeme, že $\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y$, dále spojitost $\arcsin x$: $x\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\arcsin x = 0$, tj. $y\to 0$ a VLSF $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1$$ („taková" limita)

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ (ukažte si „sami" – analogicky k $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$)

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = „\dfrac{\frac{\pi}{2}}{+\infty}" \underset{AL}{=} 0$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x} = „\dfrac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{x-1}}_{\to -1} \underset{(AL)}{=} \underline{\underline{-1}}$

(opět „vytáhneme" nuly)

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y\to 0}\arcsin y = 0$

$\left\{ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2(\frac{1}{x^2}+1)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x(\frac{1}{x^2}+1)} = „\frac{2}{\infty}" = 0 \right.$

a fce $\arcsin y$ je spojitá v bodě 0

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y\to\frac12}\arcsin y = \arcsin\frac12 = \frac{\pi}{6}$
(spojitost)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = „\infty-\infty" = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac12$

• $\lim\limits_{x\to ?}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ – „?" zde opět znamená – rozhodnout situaci a zvolit body, kde budou ty limity teď „zajímavé" a později „užitečné":

$D_f = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$;

Pro $x\to a,\ a\neq -1$:

• $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$ díky spojitosti dané funkce
(zde využijeme spojitost složené fce)

$x\to\pm\infty$:

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y\to -1}\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

k VLSF: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1-x}{1+x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac1x-1}{\frac1x+1} \underset{(AL)}{=} -1$ a

$\operatorname{arctg} y$ je fce spojitá v bodě $x=-1$

$x \to -1$ – opět VLSF – ale zde

$$\lim_{x\to -1\pm} \frac{1-x}{1+x} = „\frac{2}{0\pm}" = \pm\infty \Rightarrow$$ (i dále budeme určit jen limity jednostranné)

- $\Rightarrow \lim_{x\to -1\pm} \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to\pm\infty} \operatorname{arctg} y = \pm\frac{\pi}{2}$

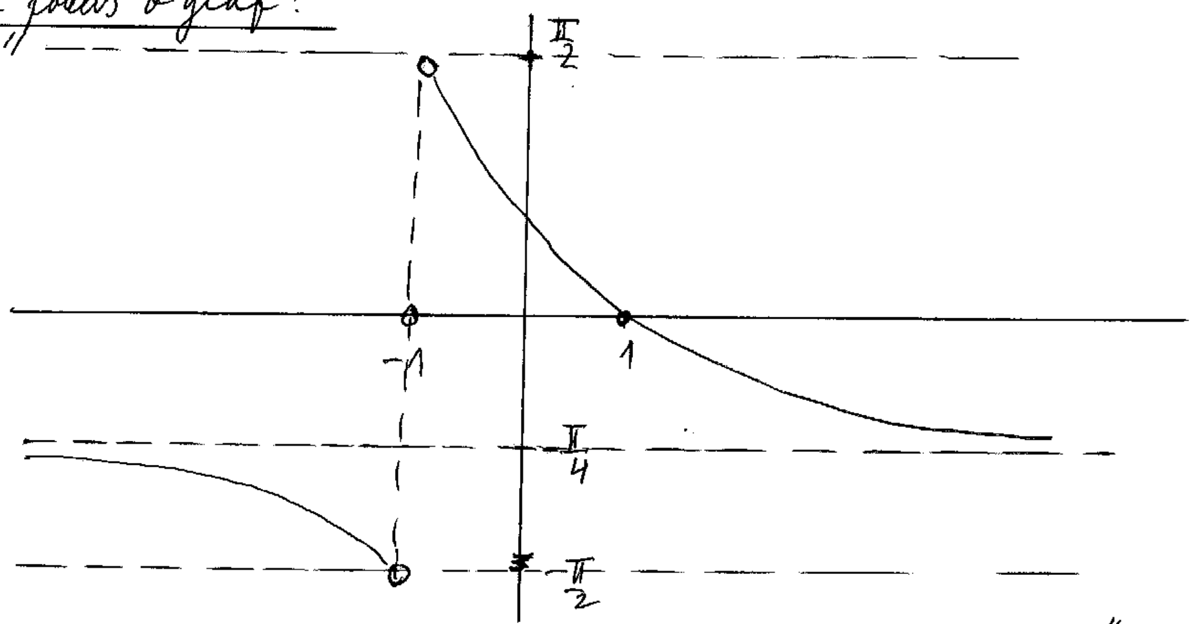
Zkusme teď „využít" limit, co jsme určili a dalších vlastností funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ a zkusit načrtnout graf fce $f(x)$:

- $D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$; $H_f \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(0) = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- f je spojitá (spojitost složené fce) v D_f
- f je klesající v $(-\infty,-1)$ i v $(-1,+\infty)$; označme $f(x) = g(h(x))$, kde $g(y) = \operatorname{arctg} y$, $h(x) = \frac{1-x}{1+x}$ $\left(= \frac{2}{1+x} - 1\right)$ –

  – pak: $g(y)$ je rostoucí v R, $h(x)$ je klesající v $(-\infty,-1)$, i v $(-1,+\infty)$

  tedy (dle cvičení 5) složená fce je klesající v $(-\infty,-1)$ i $(-1,+\infty)$

A „pokus" o graf:



Poznámka – za čas uvidíte, že část grafu „je jinak" (nebo v počítači) – „naučíme se"

5. <u>Spojitost funkce v bodě:</u>
Máme vyšetřit, zda funkce dále definované jsou spojité v bodě $x_0 = 0$ –
<u>užijeme definice:</u>

f, definovaná v $U(a)$ je spojitá v bodě $\underline{a}$, když platí:
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

a) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{|x|}$, $x \neq 0$; $f(0)=0$ – tj. funkce f bude spojitá v bodě $a=0$, když $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{|x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{x} \underset{\left(\text{„}\frac{0}{0}\text{"}\right)}{=} \lim \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

(díky sudosti fce) (a opět hledáme zde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\sin x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}} \underset{AL}{=} 1 \cdot 0 \cdot \tfrac{1}{2} = 0 \left.\begin{matrix} \\ f(0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>fce f je spojitá v bodě $a=0$</u>

b) podobně – (užití limity $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$ + VLSF) zkuste sami

c) $f(x) = x^3 \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$; $f(0)=0$:

$\underline{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0}$ (VOS: $0 \leq \left| x^3 \cos\frac{1}{x} \right| \leq |x|^3$, $\lim\limits_{x\to 0} |x|^3 = 0$)

tedy f je opět spojitá v bodě $a=0$

6. Opět „trenink" spojitosti funkce v bodě:

Je-li fce f definována v $P(x_0)$, pak f lze spojitě dodefinovat v bodě x_0, pokud existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \in R$,

a to $f(x_0) = L$ (opět z definice spojitosti: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$)

Tedy zde! – fce je def. v $R \setminus \{0\}$, lze spojitě dodef. v $x_0=0$?

a) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \neq 0$

a $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{VOS}{=} „0 \cdot \text{omezená}" = 0$

$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\pi}{2}\right)$

(nebo lze spočítat jednostranné limity: $\lim\limits_{x\to 0\pm} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$)

tedy, fci lze spojitě dodef. v bodě 0: $f(0)=0$

b) $f(x) = \dfrac{\ln(4x^2+1)}{x^2}$ pro $x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(4x^2+1)}{x^2} = „\frac{0}{0}" = \lim \frac{\ln(4x^2+1)}{4x^2} \cdot 4 = 4$$

$$\left(\text{neboť } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(4x^2+1)}{4x^2} \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} \underset{(T)}{=} 1\right.$$

$(4x^2 = y)$

tedy, opět – danou funkci lze v bodě $x=0$ spojitě dodefinovat: $f(0)=4$

c) podobně lze funkci $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ (pro $x \neq 0$) dodefinovat v bodě $x=0$ ($f(0)=0$)

d) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$

? $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ – neexistuje, neboť

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2} \text{ a}$$

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to -\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2} ,$$

<u>tedy funkci $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ spojitě dodefinovat v bodě 0 nelze!</u>

e) podobně – ani funkci $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$ nelze v bodě $x=0$ spojitě dodefinovat

$$\left(\lim_{x\to 0\pm} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} = \pm\infty \quad \left(= \lim_{x\to 0\pm} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) \right.$$

<u>A nakonec slíbená poznámka k příkladu 3*</u>

S našimi znalostmi „nekonečných řad bychom mohli dokázat", že

$$\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{a odtud} \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0 \quad (\text{užití: } e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1)$$

ale už ne pak (ve cvičení 4 jsme konvergenci $\sum\limits_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ $(=e^x)$ ukázali pro $x>0$ jako cvičení)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} .$$

Při zadání příkladu na cvičení 6, jsem si neuvědomila, že jste nepobírali " absolutní konvergenci řad, tak "tento příklad řešit zde nebudu (stejně i $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dokázal pomocí definice $\sin x$ nekonečnou řadou – viz přednáška – neumíme " – nemáme dost znalostí o nekonečných řadách) – pokud byste řešení tohoto příkladu chtěli „vidět", napište – "udělám to".

a tedy aspoň důkaz:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \text{ tj. máme ukázat, že}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} = +\infty :$$

1) ukážeme, že $\sum\limits_0^\infty \frac{x^n}{n!} \geqq 1+x$ pro $x>0$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & \forall N: \sum\limits_0^N \frac{x^n}{n!} \geqq 1+x \\ \text{(ii)} & \text{ex. } \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_0^N \frac{x^n}{n!} = e^x \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{uspořádání limit}}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\text{pro } x>0}{e^x \geqq 1+x}, \quad \lim_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty \Rightarrow$$

$$\underset{\text{VOS}}{\Rightarrow} \quad \underline{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$$

a 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = „\frac{1}{\infty}" \underset{\text{AL}}{=} 0.$

$x=-t$: $x\to-\infty \Rightarrow t\to+\infty$